

1 次の (1) から (5) までの各問いに答えよ。なお、途中の式や考え方等も記入すること。

(1) 次の不等式を満たす整数 n を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$$6^n < 5^{20} < 6^{n+1}$$

(2) 実数 x, y が $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$ を満たすとき、

(a) $|x| + |y|$ の最小値とそのときの x および y の値を求めよ。

(b) $|x| + |y|$ の最大値とそのときの x および y の値を求めよ。

1 (続き)

(3) xyz 空間において, 2 点 $(5, 1, 2)$, $(-3, 7, 12)$ を直径の両端とする球面がある。この球面が, z 軸から切り取る線分の長さを求めよ。

(4) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 (x+2)(x-1)^9 dx$$

1 (続き)

(5) 次の文章は、『貯蓄額や所得の多い少ないは「学歴」と関係あるのか?』という記事¹からの抜粋である。

表は厚生労働省の令和元年国民生活基礎調査から、学歴ごとの平均所得金額（15歳以上の雇用者1人あたり）をまとめたものです。（中略）
男性・女性ともに専門学校・短大・高専卒の方が所得金額が多いのに、総数となると高校・旧制中卒の方が多いのは統計上の謎です。

| | 小学・ 中学卒業 | 高校・旧 制中卒業 | 専門学校・短 大・高専卒業 | 大学・大 学院卒業 |
|----|-------------|--------------|------------------|--------------|
| 総数 | 245.2万円 | 303.5万円 | 278.6万円 | 487.4万円 |
| 男性 | 300.8万円 | 404.6万円 | 409.0万円 | 584.6万円 |
| 女性 | 160.5万円 | 186.1万円 | 216.6万円 | 291.5万円 |

男性の所得金額も女性の所得金額もともに、専門学校・短大・高専卒業の方が、高校・旧制中卒業より多いのに、総数（男性＋女性）では、逆転した結果になっている。これはどうしてか、説明しなさい。

¹あるじゃん All About マネー。 ”貯蓄額や所得の多い少ないは学歴と関係あるのか?”
<https://allabout.co.jp/gm/gc/471199> (参照 2022-09-02)

2 以下の問いに答えよ。なお、途中の式や考え方等も記入すること。

(1) 点 $(3, -2)$ を、原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したときの点の座標を求めよ。

(2) 3点 $A(1, 1)$, $B(3, -2)$, C について、 $AB=AC$ かつ $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ であるとき、点 C の座標を求めよ。

複素数平面上で原点 O と2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を頂点とする $\triangle OAB$ がある。直線 OB に関して点 A と対称な点を C , 直線 OA に関して点 B と対称な点を D とする。

(3) 点 $C(\gamma)$ とするとき、 $\gamma = \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\beta$ であることを示せ。ただし、 $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ と共役な複素数を $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$ で表すとする。

(4) 辺 AB と直線 DC が平行なとき、 $\triangle OAB$ はどのような三角形か、求めよ。

3 以下の問いに答えよ。ただし、 n は自然数とし、 $0! = 1$ とする。なお途中の式や考え方も記入すること。

(1) S_1 を

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{(k+1)!}$$

とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_1$ を求めよ。

(2) S_2 を

$$S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{(k+2)!}$$

とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_2$ を求めよ。

(3) S_3 を

$$S_3 = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{(k+3)!}$$

とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_3$ を求めよ。

(4) 次の和 S_p を推測し、それを数学的帰納法によって証明せよ。ただし、 p は自然数とする。

$$S_p = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{(k+p)!}$$